MA1 – přednáška 4. 11. 2020 („písemná")

Derivace funkce

– „významný druh" limity – v matematice i pro aplikace.
(„Motivaci", definici derivace funkce a několik příkladů výpočtu derivace dle definice jsme „stihli" na konci minulé přednášky, „sepsáno" je zde.)

Definice (derivace funkce v bodě)

Nechť funkce f je definována v okolí $U(a)$, $a \in R$. Existuje-li limita
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left(\underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right),$$
nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a, značíme $f'(a)$, nebo (zvláště v aplikacích v přírodních vědách) $\frac{df}{dx}(a)$.

Je-li f definovaná v $U_+(a)$ (resp. v $U_-(a)$) a existuje-li
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left(\text{resp. } \lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right),$$
pak tuto limitu nazýváme jednostrannou derivací funkce f zprava (zleva) v bodě a a značíme (obvykle) $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(a)$)

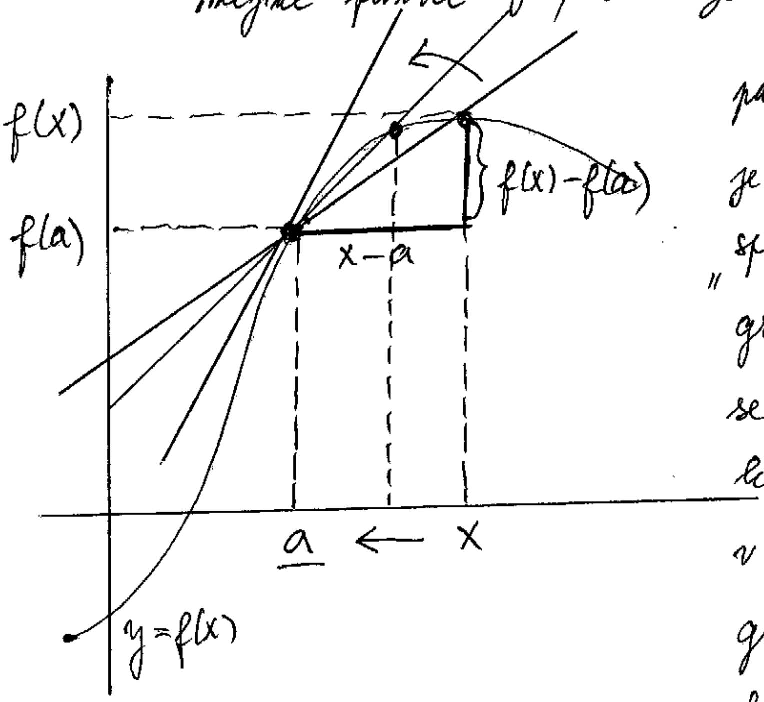
Poznámky:

1. Existuje-li $f'(a)$, pak existují i $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí
$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a).$$
2. Je-li $f'(a) \in R$, pak tuto derivaci nazýváme vlastní derivace; je-li $f'(a) = +\infty$ $(-\infty)$, pak říkáme, že funkce f má v bodě a derivaci nevlastní.
(analogicky pro $f'_+(a)$, $f'_-(a)$)

Dva příklady „motivace vzniku" derivace:

1. Z fysiky (z mechaniky) – okamžitá rychlost pohybu:
označíme-li $s(t)$ dráhu pohybu (v závislosti na čase), $t \in \langle T_1, T_2 \rangle$, a když si zvolíme $t_0 \in (T_1, T_2)$, pak podíl $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ je průměrná rychlost pohybu v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ (nebo $\langle t, t_0 \rangle$), a limita
$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = v(t_0)$ je ve fysice t. zv. okamžitá rychlost pohybu v čase t_0;

2. Grafický „pohled":
mějme funkci f, která je definována v $U(a)$;



pak podíl $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k(x)$ je vlastně směrnice přímky, která „spojuje" body $[a, f(a)]$ a $[x, f(x)]$ grafu funkce f, a pro $x \to \underline{a}$ se body $[x, f(x)]$ a $[a, f(a)]$ k sobě blíží (je-li funkce f v bodě $\underline{a}$ spojitá), a „sečny" grafu f se zřejmě budou „blížit" k přímce, která bude mít s grafem f jen jediný společný bod $[a, f(a)]$ – a tato přímka může být chápána jako tečna ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$.

Příklady výpočtu derivací funkce dle definice:

1. $f(x) = c$, (c-konstanta), $\mathcal{D}f = R$:

$a \in R$: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

2. $f(x) = x$, $\mathcal{D}f = R$:

$a \in R$ (libovolný): $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x \to a} 1 = 1$$

3. $f(x) = x^2$, $\mathcal{D}f = R$:

$a \in R$ (lib.): $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = „\frac{0}{0}\text{''} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 2a$$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathcal{D}f = R \setminus \{0\}$

$a \neq 0$: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{a-x}{(x-a)ax} = -\frac{1}{a^2}$$

5. $f(x) = e^x$, $\mathcal{D}f = R$:

$a \in R$: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = „\frac{0}{0}\text{''} - ?$$

poznámka: je „vidět", že pokud je funkce f spojitá v bodě a, pak při výpočtu derivace dle definice dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = „\frac{0}{0}\text{''}$ (neboť $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, a tedy (AL) je $\lim_{x \to a}(f(x)-f(a)) = 0$) – je třeba tedy „hledat" a „vydělit" nuly v čitateli, i jmenovateli –

a pro limitu s exponenciálou typu „$\frac{0}{0}$" máme „tahákovou" limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{– a toto je vlastně} \quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0},$$

tedy už víme, že $f'(0)=1$; a tuto „derivaci" využijeme pro nalezení derivace exponenciely $f(x)=e^x$ v libovolném bodě $a\in R$:
(využijeme zde „druhý" typ limity v definici $f'(a)$).

$$\underline{f'(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\text{zde}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0} e^a\cdot\underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{(T)\to 1}=\underline{e^a}$$

$(a\in R)$

6. $\underline{f(x)=\ln x,\ \mathcal{D}f=(0,+\infty):}$

$a\in(0,\infty)$ (lib.). pak máme opět $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$, a

$$\underline{f'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)} \underset{\text{VLSF}}{=} \left(\frac{x}{a}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln t}{t-1}\underset{\text{AL}}{=}\underline{\frac{1}{a}}$$

7. $\underline{f(x)=\sin x,\ x\in R:}$

opět zde už známe $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, a dále tuto limitu využijeme:

$$\underline{f'(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\sin a\cdot\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{\to 0}+\cos a\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right)\underset{\text{AL}}{=}\underline{\cos a}$$

8. $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{D}f = \langle 0, +\infty)$:

pro $a>0$: $\quad f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = „\dfrac{0}{0}" = \lim \dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$;

pro $a=0$ – zde lze pouze „počítat" derivaci zprava – tj.:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$$

Tedy zde pouze máme derivaci „jednostrannou" a navíc – nevlastní. V „grafické" podobě to „znamená", že graf funkce $f(x)=\sqrt{x}$ z počátku „startuje" s nekonečnou rychlostí, a (graficky) má v bodě $[0,0]$ graf „polotečnu" svislou – tj. „osu y".

9. $f(x) = |x|$, $\mathcal{D}f = R$

(i) uvažme $a>0$: (pro x „blízko" a lze uvažovat i $x>0$)

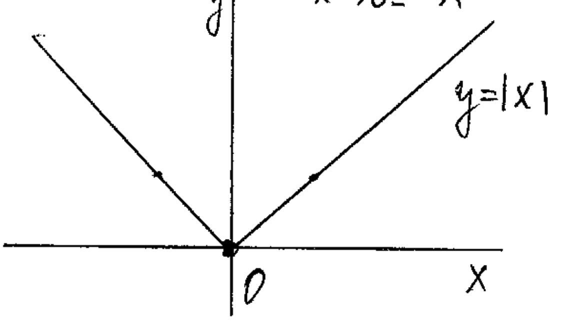
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1 \; ;$$

(ii) uvažme $a<0$ (opět i $x \in \mathcal{U}(a)$ lze uvažovat $x<0$)

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{|x|-|a|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-x+a}{x-a} = -1$$

(iii) a zbývá $x=0$!? – asi budeme muset počítat derivace jednostranné

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \Rightarrow \text{fce } f(x)=|x|$$



nemá oboustrannou derivaci v bodě $x=0$ – (bude to znamenat „špičku" na grafu – nejčastěji)

10. $\underline{f(x) = \operatorname{sgn}(x)}$ $\left(= \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \right)$

$f'(a)=0$ pro $a \in (0,+\infty)$ (derivujeme konstantní funkci v $(0,+\infty)$)

$f'(a)=0$ pro $a \in (-\infty,0)$ (—"—)

a $f'(0) = ?$: musíme opět počítat jednostranné derivace; (funkce je „jiná" v $P_+(0)$, než v $P_-(0)$)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \text{ a}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = „(-1).(-\infty)" = +\infty,$$

tedy vidíme, že funkce $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ má derivaci v bodě $a=0$, ale nevlastní – $f'(0)=+\infty$ ($f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$)

Z uvedených příkladů vidíme, že počítat "derivace funkcí užitím definice není vždy jednoduché" – u spojitých funkcí v bodě $\underline{a}$ je derivace v bodě $\underline{a}$ vždy limita typu „$\frac{0}{0}$" – a tak budeme postupovat „podobně" jako u limit;

po definici (tu už máme) určíme derivace základních jednoduchých funkcí – „tabulku (tahák) derivací" (také už jich máme dost spočítaných – ještě rozšíříme), a pak se seznámíme s pravidly, jak najít derivace (pokud známe derivace funkcí f, g):

$$(cf)', \ (f+g)', \ (f\cdot g)', \ \left(\frac{f}{g}\right)', \ (f(g(x)))', \ (f^{-1}(x))'$$

(věty o výpočtu derivací).

A ještě dříve poznámka – „derivace jako funkce":

Mějme funkci $f: \mathcal{D}f \to R$; označme $\mathcal{D}f'$ množinu všech bodů z $\mathcal{D}f$, ve kterých má funkce f vlastní derivaci f' (tj. $\mathcal{D}f' = \{x \in \mathcal{D}f;\ \text{existuje } f'(x) \in R\}$);
a můžeme uvažovat „novou" funkci:
pro $x \in \mathcal{D}f'$ bude nabývat hodnoty $f'(x) \in R$
– takto se „vnímá" derivace jako funkce, a budeme ji značit $f'(x)$, $x \in \mathcal{D}f'$ (a tak ji i „chápat"), a v příkladech:

$$(x^2)' = 2x,\ x \in R; \qquad (\sin x)' = \cos x,\ x \in R;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0; \qquad (e^x)' = e^x,\ x \in R;$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0,+\infty); \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},\ x \in (0,+\infty)$$

Teď by měla „následovat" tabulka derivací základních funkcí, ale bude lepší na „tahák" derivací než celou stránku, tak napíšu ještě jeden příklad – derivaci funkce $\cos x$, $x \in R$: (už s „proměnnou x"):

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = (\text{užijeme součtový vzorec})$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cosh - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \Bigg[\cos x \underbrace{\left(\frac{\cosh - 1}{h}\right)}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\substack{\to 1 \\ (T)}}\Bigg] \underset{AL}{=} -\sin x,\quad x \in R$$

Tabulka derivací (základních funkcí - nám bude stačit)

$c' = 0$ (c-konstanta), $x \in R$;

$(x)' = 1$, $x \in R$;

$$(*)\ \begin{cases} (x^n)' = n x^{n-1}, & x \in R,\ n \in N \quad (\text{„máme" pro } n=2) \\ (x^{-n})' = (-n)\,x^{-n-1}, & x \neq 0,\ n \in N \quad (\text{„máme" pro } n=1) \\ (\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}, & x > 0 \text{ pro } n\text{-sudé},\ x \neq 0 \text{ pro } n\text{-liché} \end{cases}$$

a obecně (zahrnuje (*)) platí:

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$, $x > 0$ (pro „některá" α je definována $(x^{\alpha})'$ na „větší" množině – viz (*))

$(e^x)' = e^x$, $x \in R$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$;

$(\sin x)' = \cos x$, $x \in R$;

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in R$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$;

$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

(Ty z „vzorců", co jsme „neukázali", spočítáme jako příklady.)

Pravidla pro výpočet derivací:

Zatím si je uvedeme bez důkazů a ukážeme, jak se pravidla používají pro výpočet derivace funkce, některá z těchto pravidel se pokusíme dokázat příští přednášce.

Ještě označení:

$$(cf)(x) = c\cdot f(x), \quad x \in \mathcal{D}f;$$
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad x \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g;$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), \quad \text{—''—}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g,\ g(x) \neq 0.$$

- **Věta** (aritmetika derivací)

  Nechť existují vlastní derivace $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$. Pak také funkce cf, $f+g$, $f\cdot g$ mají vlastní derivace v bodě x_0, a též funkce $\frac{f}{g}$ má derivaci v bodě x_0, je-li $g(x_0) \neq 0$, a platí:

$$(cf)'(x_0) = c f'(x_0) \quad (c \in R \text{ libovolná konstanta});$$
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$
$$(f\cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0);$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

- **Věta** (o derivaci složené funkce) (značíme zde $(f\circ g)(x) = f(g(x))$)

  Nechť existuje vlastní derivace $g'(x_0)$ a $f'(y_0)$, kde $y_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce $f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0, a to

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

• Věta (o derivaci inverzní funkce)

Nechť k funkci f na intervalu (a,b) existuje inverzní funkce, $f(a,b)=(c,d)$ (tedy inverzní funkce f^{-1} (k fci f) je definována na intervalu (c,d). Pak, existuje-li pro $x_0 \in (c,d)$ vlastní derivace $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$ (tj. derivace funkce f v bodě $f^{-1}(x_0)$), funkce f^{-1} má v bodě x_0 vlastní derivaci

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \quad ,$$

Dále uvedeme několik příkladů výpočtu derivací podle uvedených pravidel (příklady derivování inverzních funkcí uděláme příště přednášce). Ještě poznámka k označení derivací – pokud je zadána „konkrétní" funkce, pak se derivace v bodě x_0 značí i takto: $f'(x_0) = (f(x))'_{x=x_0}$, např.

$$(x^2)'_{x=a}\ ,\quad (\sin x)'_{x=4\pi}\ ,\quad (\operatorname{arctg} x)'_{x=1}\ ,\quad (\sqrt{x})'_{x=4}\ ;$$

a pak $(x^2)'_{x=a} = 2a$; $(\sin x)'_{x=4\pi} = \cos 4\pi (=1)$,

$$(\operatorname{arctg} x)'_{x=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ ,\quad (\sqrt{x})'_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}\ .$$

A příklady výpočtu derivací (vždy je dobré „uvádět i maximální množinu, kde derivace funkce existuje)

1. $(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x \ ,\ x \in R \ ;$

2. $\underline{(x^2+\sqrt[3]{x})'} = (x^2)' + (x^{\frac{1}{3}})' = 2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$

3. $\underline{(\sqrt[3]{x})'_{x=0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$

(z definice)

4. $\underline{(x^2 \cdot \cos x)'} = (x^2)'\cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x\cos x - x^2 \sin x, \quad x \in R$

5. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in R$$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in Z$$

7. derivování složené funkce: „$\underline{\underline{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}}$"

a odtud: 1) $(\sin(g(x)))' = \cos(g(x)) \cdot g'(x) \quad ((\sin y)' = \cos y)$

a příklady: $(\sin(5x))' = \cos(5x) \cdot (5x)' = \cos(5x) \cdot 5, \quad x \in R;$

$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0;$

$(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$

(pro $x \to 0+$ – je třeba výpočet užitím definice derivace)

a podobně $(\cos(x^2+1))' = -\sin(x^2+1) \cdot 2x, \quad x \in R$

2) $$\underline{\left(\ln(g(x))\right)' = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x) \quad (\,g(x)>0\,)}$$

(důležitý příklad !)

$$\left(\ln(3x^2+2)\right)' = \frac{1}{(3x^2+2)}\cdot(3x^2+2)' = \frac{6x}{3x^2+2}, \quad x\in R\,;$$

$$\left(\ln(\operatorname{arctg} x)\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}, \quad x>0\,;$$

3) $$\underline{\left((g(x))^n\right)' = n(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)}$$ $\quad n\in N$ (podobně pro $(g(x))^{-n}$, $n\in N$, nebo pro $(g(x))^{\alpha}$, $g(x)>0$)

$$\left(\frac{1}{(x^3+8)^3}\right)' = \left((x^3+8)^{-3}\right)' = -3(x^3+8)^{-4}(x^3+8)' = -9x^2(x^3+8)^{-4},$$
$$x\neq -2$$

$$\left((\sin x)^4\right)' = 4\sin^3 x\cdot(\sin x)' = 4\sin^3 x\cdot\cos x, \quad x\in R$$

$$\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right)' = \left(\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\frac{1(x+2)-(x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\frac{3}{(x+2)^2},$$

$$x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$$

(i když je definiční obor zadané funkce
$D_f = (-\infty,-2)\cup\langle 1,+\infty)$)

<u>Poznámka:</u> Zatím bychom museli „zkoumat" $f'_+(1)$ z definice, naučíme se i jiný způsob, jak tyto derivace, které nelze spočítat" užitím tabulky derivací a pravidel pro" derivování.

4) $\underline{\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$ $\quad \left((e^y)' = e^y \right)$

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2x\, e^{-x^2}, \quad x \in R$$

<u>a speciálně:</u> $\underline{(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0}$

neboť: $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$

<u>a navíc:</u> $\underline{\left(f(x)^{g(x)}\right)'} = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)'$

$$= \underline{f(x)^{g(x)}\left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)}$$

(předpokládáme $x \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$, $f(x) > 0$, ex. $f'(x), g'(x)$ vlastní)

a líba: $\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \cdot \ln x}\right)' = e^{\sin x \cdot \ln x}(\sin x \cdot \ln x)' =$

$$= \underline{x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right), \quad x > 0}$$

5) <u>derivace funkce inverzní</u> „$f^{-1}{}'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$" $\quad (f'(f^{-1}(x)) \neq 0)$

$$\underline{(\operatorname{arctg} x)'} = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x)$$

zde: pro $x \in R$ je $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tedy $\cos^2(\operatorname{arctg} x) \neq 0\ (>0)$, věta o derivaci inverzní fce lze použít – ale výsledek je „nečitelný" – upravíme:

potřebujeme asi (hodilo by se) upravit tak, aby místo $\cos^2 y$ zde bude $\operatorname{tg} y$ – zkusme:

$$\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1}, \text{ pro } y, \text{ kde } \cos y \neq 0,$$

tj. určitě lze pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, kde „jsou" hodnoty funkce $\operatorname{arctg} x$, $x \in R$; tedy po této úpravě máme:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1}$$

a protože $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ pro $x \in R$, máme vzorec z tabulky derivací:

$$\underline{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \; x \in R} \quad !$$

<u>A podobně (rychleji už) dostaneme:</u>

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$ pro $x \in (-1,1)$ (je $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tedy $\cos(\arcsin x) > 0$

a tedy lze užít rovnosti $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ ($\cos y > 0$), máme pak

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1,1);$$

zbývá zjistit $(\arcsin x)'_{x=1-}$, a $(\arcsin x)'_{x=-1+}$ – později.

(ale z grafu to „vypadá", že tyto derivace budou nevlastní, $+\infty$!)